

§ Επίπεδα στον $\mathbb{R}^3$

Για να οριστεί επίπεδο χρειαζόμαστε μίνο P με διάνοχα θέσεως $\vec{x}_0$ και δύο (γραφφικά) ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Τότε το επίπεδο δίνεται από την εξίσωση

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}} \quad (1)$$

Η (1) είναι η διανυσματική εξίσωση.

Εάν $\vec{x}_0 = (r_1, r_2, r_3)$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Τότε η (1) λαμβάνει την μορφή

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r_1 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y &= r_2 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z &= r_3 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned}} \quad (2)$$

Οι (2) λέγονται παραμετρικές εξισώσεις.

Με αλλαγή των λ, μ λαμβάνουμε

$$\begin{vmatrix} x-r_1 & y-r_2 & z-r_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad (3)$$

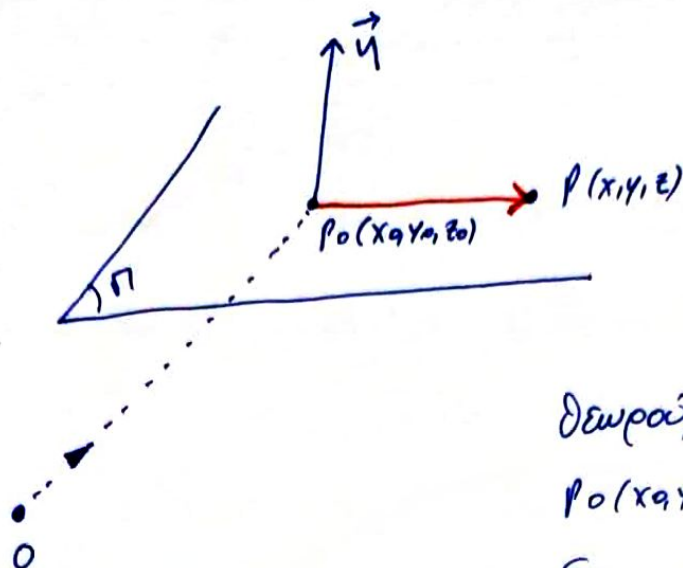
Η (3) λέγεται αναλυτική εξίσωση.

Θεώρημα:

Θεωρούμε το επίπεδο (η) με αναλυτική εξίσωση $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

με $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Τότε το διάνοχα $\vec{n} = (A, B, C)$ είναι κάθετο στο επίπεδο

Απόδειξη



Δεσφύμε ένα τυχαίο σημείο

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi.$$

$$\text{Εάν } P(x, y, z) \in \Pi.$$

τότε το διάνυσμα $\vec{P_0P} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ είναι στο εφαπτόμενο στο επίπεδο. Όμως ελεδιά $P_0, P \in \Pi$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(-) \quad A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

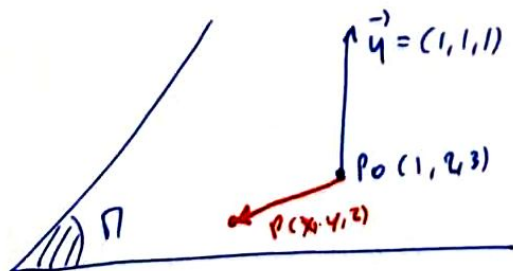
$$\Leftrightarrow \langle A, B, C \rangle; (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{n}, \vec{P_0P} \rangle = 0.$$

Άρα το διάνυσμα $\vec{n}$ είναι κάθετο στο $\vec{P_0P}$. Άρα το $\vec{n} = (A, B, C)$ είναι κάθετο στο επίπεδο.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $P_0(1, 2, 3)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (1, 1, 1)$.



Έστω $P(x, y, z)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου. Τότε το

$$\vec{P_0P} = (x-1, y-2, z-3).$$

είναι εφαπτόμενο στο (Π).

Ελεδιά το $\vec{n} = (1, 1, 1)$ από υπόθεση είναι κάθετο στο επίπεδο πρέπει

$$0 = \langle \vec{P_0P}, \vec{n} \rangle = \langle (x-1, y-2, z-3), (1, 1, 1) \rangle = x-1 + y-2 + z-3$$

$$\Rightarrow \boxed{x+y+z-6=0}$$

Παράδειγμα Ας βρούμε τις παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου
 $x+y+z-6=0$.

$$x = 6 - y - z = 6 - 1 - \mu = 6 + 1(-1) + \mu(-1)$$

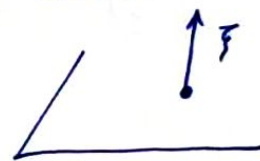
$$y = 1 + \mu(0)$$

$$z = 1 + \mu(1)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} p_1 & a_1 & a_2 \\ x = 6 + 1(-1) + \mu(-1) \\ y = 0 + 1(1) + \mu(0) \\ z = 0 + 1(0) + \mu(1) \end{matrix}$$

Παρατήρηση

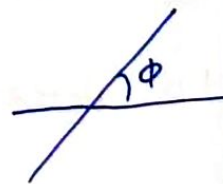
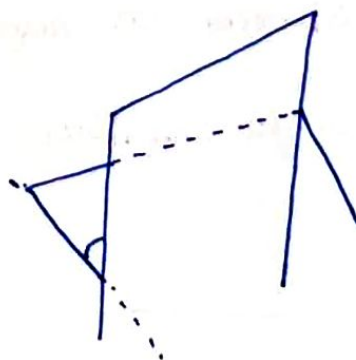
Ας υποθέσουμε ότι $Ax + By + Cz + D = 0$ είναι επίπεδο. Τότε
 το διάνυσμα $\xi = \frac{(A, B, C)}{\|(A, B, C)\|} = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
 είναι μοναδιαίο και κάθετο.



Ορισμός Δίνονται δύο επίπεδα

$$(P_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(P_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



Ορίζουμε ως γωνία των $(P_1), (P_2)$ την
 γωνία που σχηματίζουν τα δύο κάθετα τους.
 Δηλαδή η γωνία φ των P_1, P_2 θα δίνεται
 από την εξίσωση

$$\cos \phi = \left| \left\langle \frac{(A_1, B_1, C_1)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \frac{(A_2, B_2, C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right\rangle \right|$$

$$\Rightarrow \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \cos \phi$$

Συμπέρασμα:

- (1) Δύο επίπεδα $A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0 : (\pi_1)$ είναι παράλληλα
 $A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0 : (\pi_2)$

όταν

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}}$$



- Για παράδειγμα τα επίπεδα $(\pi_1) : x + y - z + 4 = 0$ είναι παράλληλα.
 $(\pi_2) : 2x + 2y - 2z + 3 = 0$

- (2) Τα επίπεδα αμνηντούν όταν

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}}$$

- (3) Τα επίπεδα είναι κάθετα όταν

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2 = 0}$$

Πρόβλημα Δίνονται τα παράλληλα επίπεδα $Ax + By + \Gamma z + \Delta_1 = 0$

Να βρεθεί το μεσοπαράλληλο επίπεδο. $Ax + By + \Gamma z + \Delta_2 = 0$



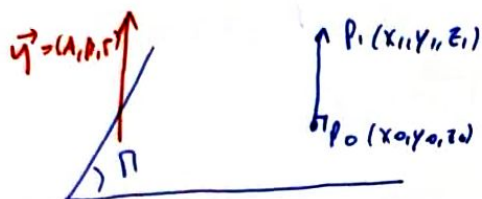
Απόσταση αμείου από επίπεδο

Ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο (Π) με αναλυτική εξίσωση

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

όπου $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Έαν $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ένα μείο του $\mathbb{R}^3$ εκτός επιπέδου.



ο·

Ας συμβολίσουμε με $P_0(x_0, y_0, z_0)$ την ορθογώνια προβολή του P_1 στο (Π) .

Ορισμός Ορίσουμε ως απόσταση του P_1 από το επίπεδο (Π) τον αριθμό

$$d(P_1, \Pi) = \|\vec{P_0 P_1}\|.$$

Θεώρημα Η απόσταση του $P_1(x_1, y_1, z_1)$ από το επίπεδο

$$(\Pi): Ax + By + Cz + D = 0.$$

δίνεται από το τύπο

$$d(P_1, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Απόδειξη Έστω ότι $P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι η προβολή του $P_1(x_1, y_1, z_1)$ στο (Π) . Άρα.

$$Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + D = 0 \quad (L)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι $\vec{P_1 P_0}$ είναι παράλληλο με το κάθετο $\vec{n} = (A, B, \Gamma)$.

Επομένως $|\langle \vec{P_0 P_1}, \vec{n} \rangle| = \|\vec{P_0 P_1}\| \cdot \|\vec{n}\| |\cos(\vec{P_0 P_1}, \vec{n})|$.

$$= d(P_1, \Pi) \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2} \cdot 1$$

$$\Rightarrow d(P_1, \Pi) = \frac{|\langle \vec{P_0 P_1}, \vec{n} \rangle|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

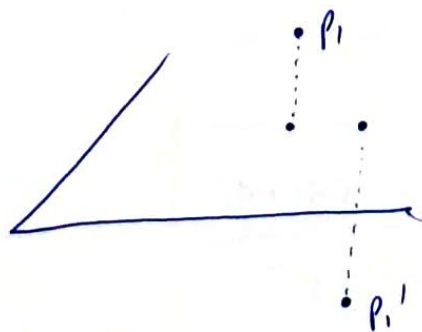
Υπολογίζουμε $|\langle \vec{P_0 P_1}, \vec{n} \rangle| = |\langle (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), (A, B, \Gamma) \rangle|$

$$= |A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + \Gamma(z_1 - z_0)| = |Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 - Ax_0 - By_0 + \Gamma z_0|$$

$$\stackrel{(1)}{=} |Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + D|.$$

Ορισμός Ο αριθμός $f(x_1, y_1, z_1) = \frac{Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$ ονομάζεται προσημοσημεία

απόστασι του P_1 από το επίπεδο $Ax + By + \Gamma z + D = 0$.



θα λέμε ότι το σημείο P_1 βρίσκεται στον δεξιό ημίσφαιρο του $Ax + By + \Gamma z + D = 0$.

Εάν $f(x_1, y_1, z_1) > 0$ θα λέμε ότι το $P_1(x_1, y_1, z_1)$ βρίσκεται στον αρνητικό ημίσφαιρο του $Ax + By + \Gamma z + D = 0$ αν $f(x_1, y_1, z_1) < 0$.

Πρόβλημα Δίνεται το επίπεδο $2x + y - z = 0$

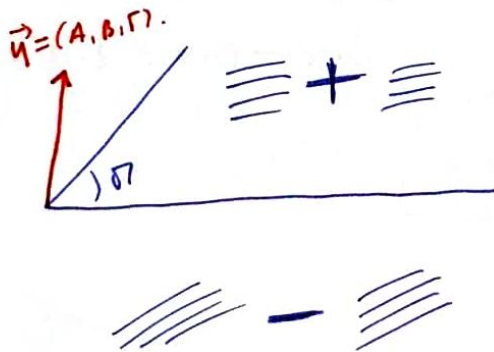
- (i) Να βρεθεί η απόσταση του $P(1,1,1)$ από το (Π) .
(ii) Να βρεθεί σε ποιον ημιχώρο του (Π) βρίσκεται το σημείο $(-1,-1,0)$.

Λύση: i) Η απόσταση του P από το επίπεδο είναι

$$d(P, \Pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

ii) Έστω $Q(-1,-1,0)$ τότε $f(-1,-1,0) = \frac{2(-1) + (-1) - (-1) \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{-3}{\sqrt{6}} < 0$

Άρα το σημείο Q βρίσκεται στον αρνητικό ημιχώρο.

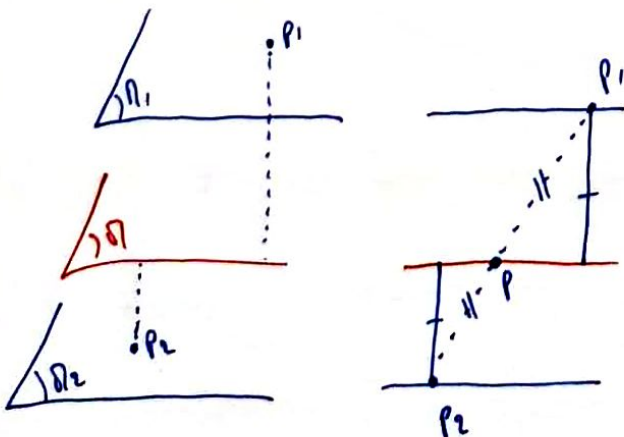


$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Πρόβλημα Δίνονται δύο παράλληλα επίπεδα

$$\begin{aligned} (\Pi_1): Ax + By + Cz + D_1 &= 0 \\ (\Pi_2): Ax + By + Cz + D_2 &= 0, \quad D_1 \neq D_2 \end{aligned}$$

Να βρεθεί το μεσοπαράλληλο επίπεδο (Π) .



Το επίπεδο που ζητάμε να έχει
εξίσωση $Ax + By + Cz + D = 0$.
Άρα αρκεί να υπολογίσουμε το D .

Τότε το $p = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2} \right)$ ανήκει στο επίπεδο π . Άρα

$$A \frac{x_1+x_2}{2} + B \frac{y_1+y_2}{2} + \Gamma \frac{z_1+z_2}{2} + \Delta = 0.$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{(-A x_1 - B y_1 - \Gamma z_1)(-A x_2 - B y_2 - \Gamma z_2)}{2} \Rightarrow \Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$$

$$\Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$$

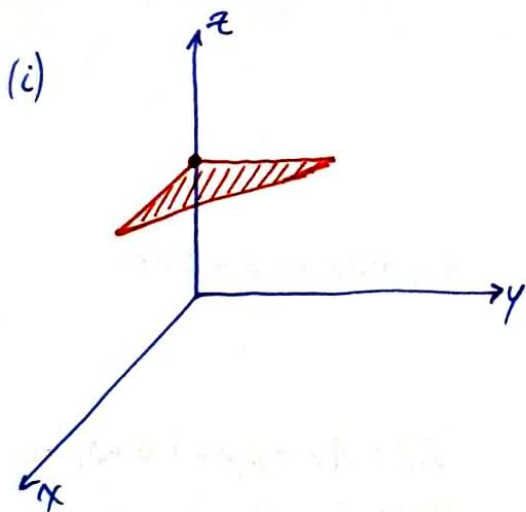
Άρα το ζητούμενο επίπεδο είναι το

$$Ax + By + \Gamma z + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = 0$$

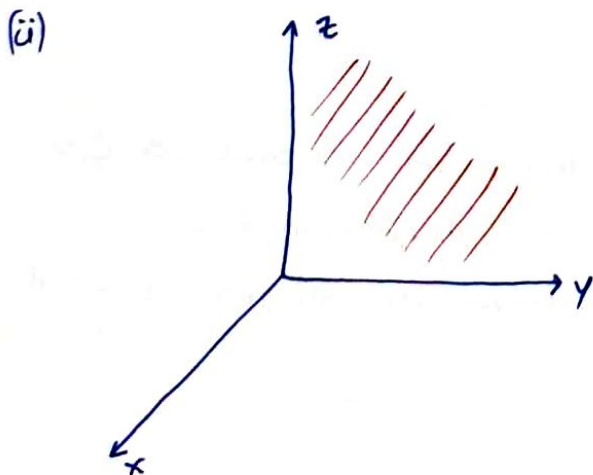
Παράδειγμα Τι παριστάνουν οι εξισώσεις

- (i) $z = 1$
- (ii) $x = 0$
- (iii) $y + z = 0$

Λύση:



$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 1.$$



Πρόβλημα 2

① Αν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα
ν.δ.ο. και

$$\vec{a} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{\beta} = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$$

$$\vec{\gamma} = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

είναι Γ.Α.

Λύση: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\boxed{\lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta} + \nu \vec{\gamma} = \vec{0}} \quad (E).$$

είναι $\lambda = \mu = \nu = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Η (E) γράφεται ως } \vec{0} &= \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \mu(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) + \nu(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) \\ &= (1+\mu)\vec{v}_1 + (1+\nu)\vec{v}_2 + (\mu+\nu)\vec{v}_3 \end{aligned}$$

$$\text{Επειδή } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ Γ.Α.} \Rightarrow \begin{cases} 1+\mu=0 \\ 1+\nu=0 \\ \mu+\nu=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-\mu \\ -\mu+\nu=0 \\ \mu+\nu=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \mu = \nu = 0}$$

Άσκηση 2 (με τον ίδιο τρόπο).

Άσκηση 3 ν.δ.ο. τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 4)$$

$$\vec{v}_2 = (1, -2, 0)$$

$$\vec{v}_3 = (3, -3, 4)$$

είναι εξαρτημένα.

Να βρείτε ένα από αυτά ως γραμμικό ανεξάρτητο αν άλλων δύο.

Λύση: Αρκεί να α.ο. $\langle \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = 0$. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Ας προσπαθήσουμε να γράψουμε το $\vec{v}_3$ ως
αδιαφορώντας $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ πρέπει να βρούμε λ, μ έτσι ώστε

$$\vec{v}_3 = \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2$$

$$\Leftrightarrow (3, -3, 4) = \lambda (1, 1, 4) + \mu (1, -2, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \lambda - 2\mu = -3 \\ 4\lambda + 0\mu = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Άσκηση 4 Ν.δ.ο.

Τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, -3, 2)$ είναι βάσις του $\mathbb{R}^3$.

Να βρείτε τους συντελεστές των $\vec{v} = (1, 2, 3)$ ως προς αυτή την βάση

Λύση: Αρκεί ν.α.ο. $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ γραμμικά ανεξάρτητα. Ισοδύναμα αρκεί ν.δ.ο.

$$\langle \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle \neq 0.$$

$$\text{Υπολογίζουμε } \langle \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Πρέπει να βρούμε κ, λ, μ έτσι ώστε $\vec{v} = \kappa \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 + \mu \vec{v}_3$

Ισοδύναμα
$$\begin{cases} \kappa + \mu = 1 \\ \kappa + 2\lambda + \mu = 2 \\ -\kappa + \lambda + 2\mu = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (1, 2, 3) = \kappa (1, 0, -1) + \lambda (1, 2, 1) + \mu (0, -3, 2).$$

$$\begin{cases} \kappa + \lambda + 0\mu = 1 \\ 0\kappa + 2\lambda - 3\mu = 2 \\ -\kappa + \lambda + 2\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = -\frac{3}{5} \\ \lambda = \frac{8}{5} \\ \mu = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\kappa = 1 - \lambda \quad 3\mu = 2\lambda - 2$$

$$-1 + 1 + 1 + 2\left(\frac{2\lambda - 2}{3}\right) = 3$$

$$2\lambda + \frac{4(\lambda - 1)}{3} = 4$$

$$6\lambda + 4(\lambda - 1) = 12$$

$$6\lambda + 4\lambda - 4 = 12$$

$$\bullet 10\lambda = 16$$

$$\lambda = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$\kappa = 1 - \frac{16}{10} = \frac{10}{10} - \frac{16}{10} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$3\mu = 2\frac{16}{10} - 2 = \frac{16}{5} - 2 = \frac{16}{5} - \frac{10}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow \mu = \frac{6}{5} \Rightarrow \mu = \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$$

(10)

Παράδειγμα 7 Αν το $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ είναι κάθετο σε τρία μη ανεπίλεδα διανύσματα. Τότε $\vec{v} = \vec{0}$.

Λύση: Έστω $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ μη ανεπίλεδα και
 $\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}_3 \rangle = 0$.

Ελέγξτε τα $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ μη ανεπίλεδα από τέτοια βαν.

Άρα $\vec{v} = 1\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 + \nu\vec{w}_3$

Υπολογίζουμε $\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$.

$$= \langle \vec{v}, 1\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 + \nu\vec{w}_3 \rangle$$

$$= 1\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle + \mu\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle + \nu\langle \vec{v}, \vec{w}_3 \rangle$$

$$= 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{0}}$$

Άσκηση 8 Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της παραστάσεως.

$$g(x, y, z) = x - y + 3z$$

όταν τα x, y, z πληρούν $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$.

Λύση: Θα γράψουμε το g ως εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

$$g(x, y, z) = \langle \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2}\right)}_{\vec{a}}, \underbrace{(\sqrt{2}x, \sqrt{3}y, 2z)}_{\vec{\beta}} \rangle$$

Άρα από την ανισότητα Cauchy-Schwarz θα έχουμε

$$|g(x, y, z)| = |\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle|$$

$$\leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{\beta}\|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{9}{4}} \sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}$$

$$\Rightarrow |g(x, y, z)| \leq \sqrt{\frac{37}{12}}$$

Άρα

$$\max g = \sqrt{\frac{37}{12}}$$

$$\min g = -\sqrt{\frac{37}{12}}$$

Για να πετύχουμε $\max$ και $\min$ πρέπει $\vec{\alpha}' = \pm \vec{\beta}'$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2} \right) = \lambda (\sqrt{2}x, \sqrt{3}y, 2z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{3\lambda} \\ z = \frac{3}{4\lambda} \end{cases}$$

όμως $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{3\lambda}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{4\lambda}\right)^2 = 1.$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} = 1.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{4} \right) = \lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$$